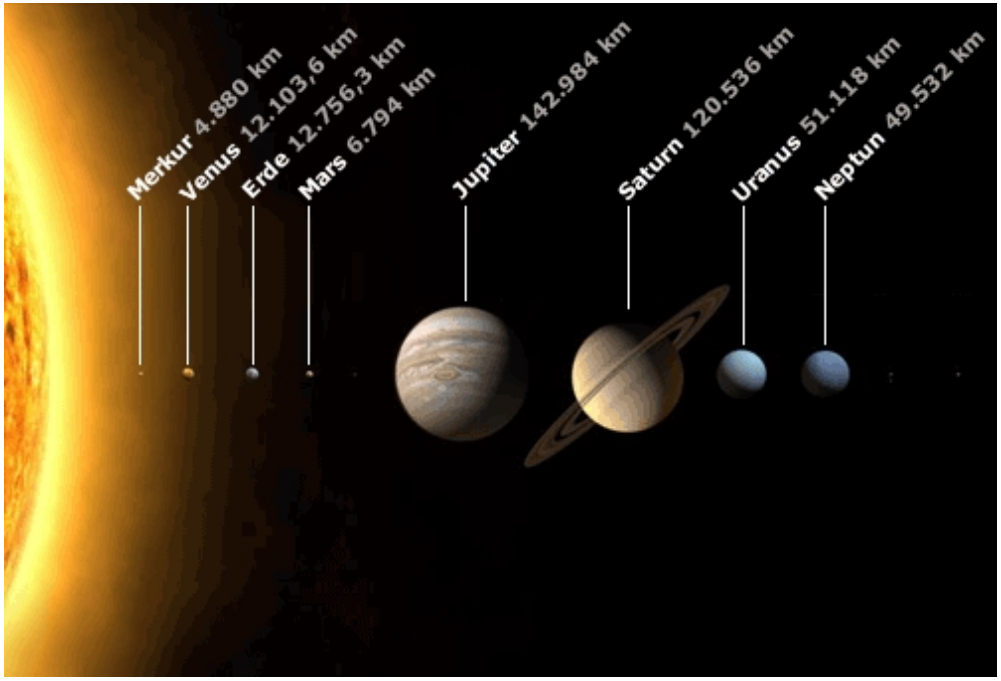
Planeten, Sterne und Galaxieen

Einsteinsche Feldgleichungen

Lokale Lösungen - Schwarze Löcher

Globale Lösungen - Das Urknall Modell

Inhalt des Universums



"All Planet Sizes" - NASA / Lunar and Planetary Institute

Stern im Zentrum:

Sonne macht ca. $99,9\%$ der Gesamtmasse des Sonnensystems aus.

$(M_\odot \approx 2 \cdot 10^{30} kg \ , \ \rho \approx 1,4 \frac{g}{cm^3})$

Planeten - z.B. die Erde $m \approx 6 \cdot 10^{24} kg$, $\rho \approx 5,5 \frac{g}{cm^3}$

Zwergplaneten, Monde, Asterorioden, ...

Abstand Erde - Sonne ca. $149,6 \cdot 10^6 km = 1AU$

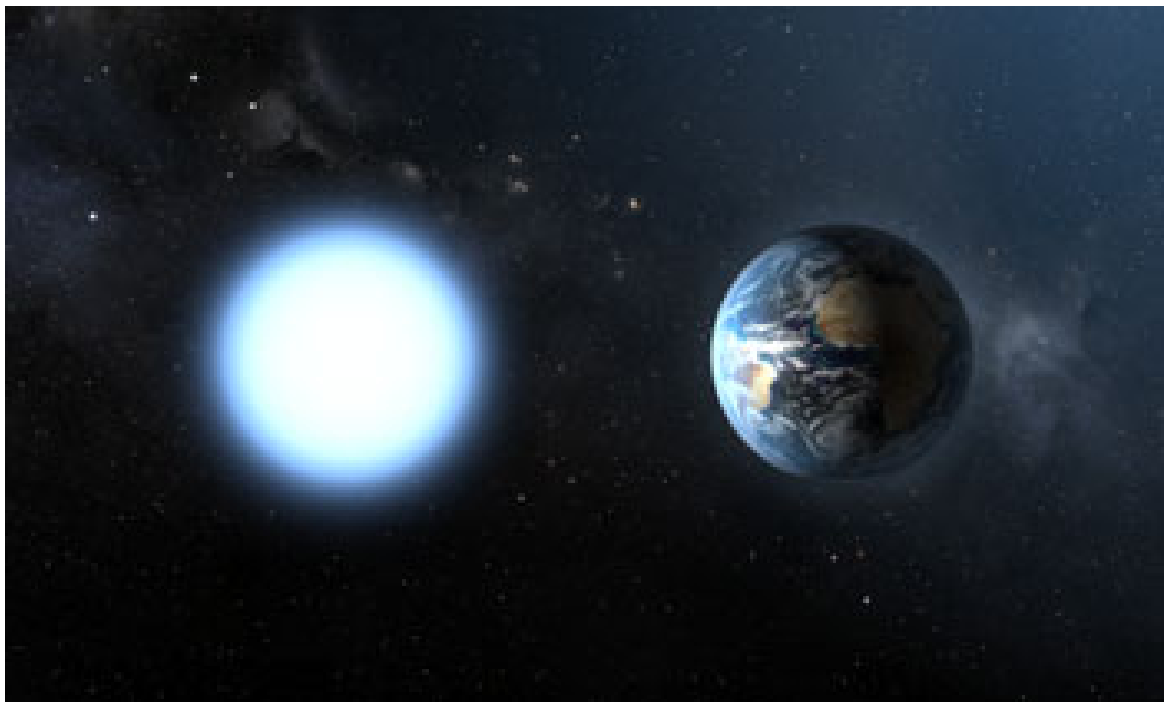
Abstand Neptun - Sonne ca. $30AU$

Objekte jenseits der Neptunbahn ($30AU - 50AU$) “Kuipergürtel”

Oortsche Wolke umschließt das Sonnensystem schalenförmig etwa im Bereich $300AU - 100.000AU$ ($\sim 1LJ$)

Endstadium von Sternen mittlerer Masse, $r \lesssim 10^4\,km$

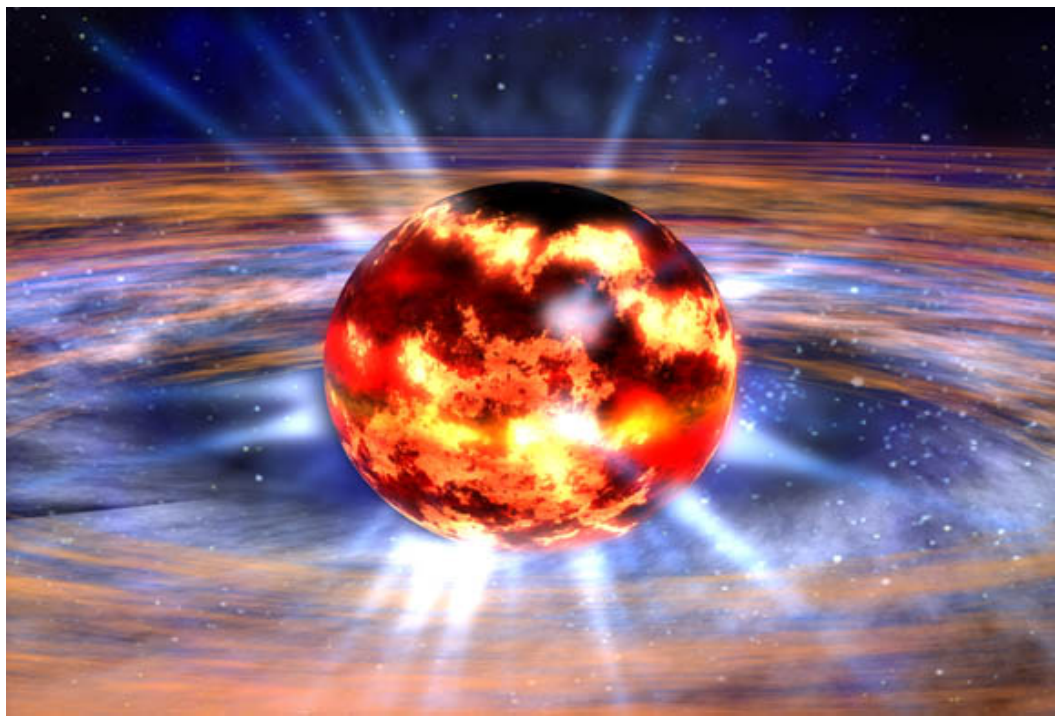
Restmasse des Kerns unter $1,44\,M_\odot$



Weisser Zwerg - ESA / Nasa

Kern eines massiven Sterns nach Supernova Explosion, $r \sim 10km$

Masse nach Supernova $(1,44 - 3)\ M_{\odot}$



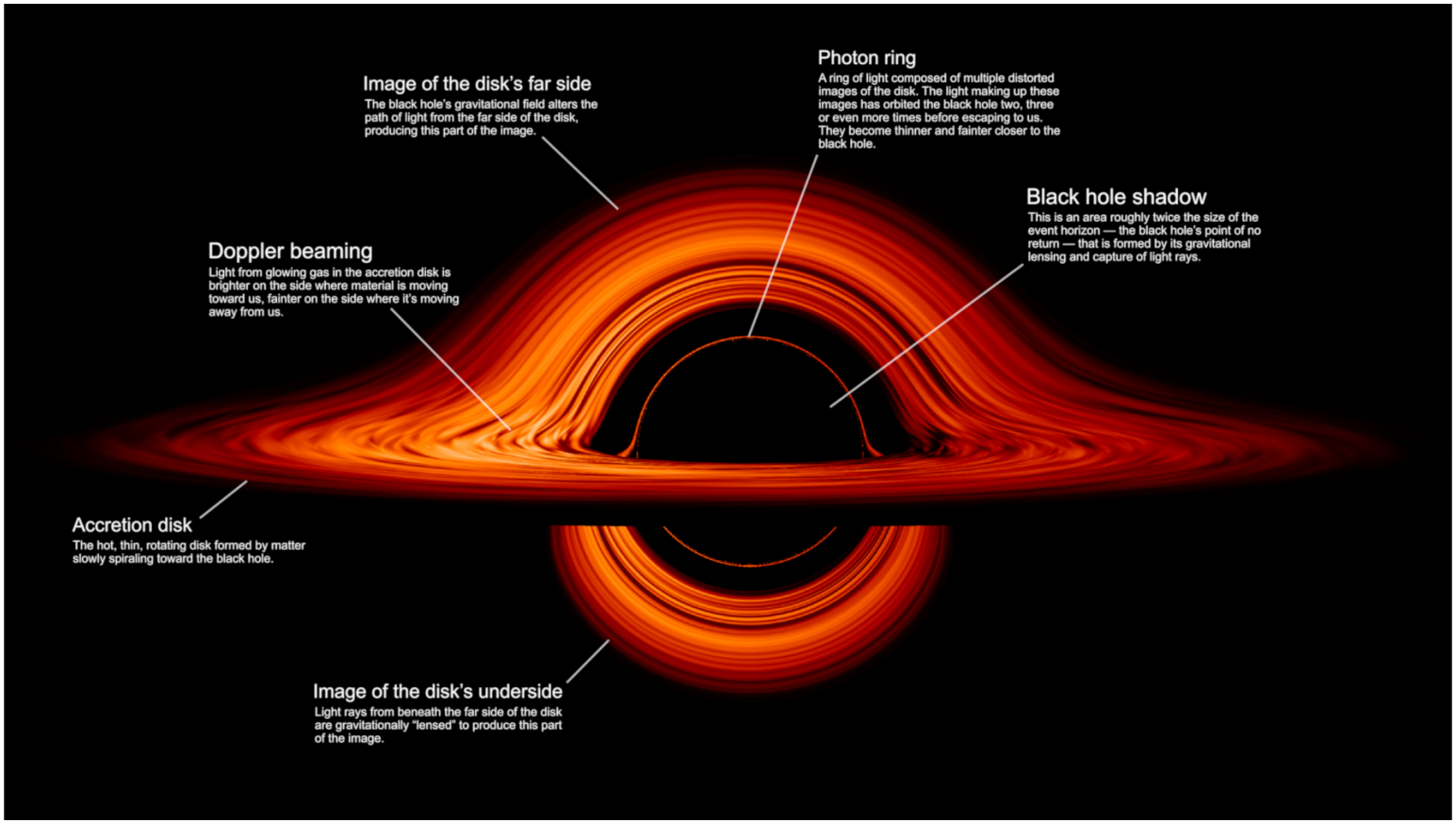
Neutronenstern - Nasa

Stellare S.L.: Masse$> 3M_\odot$ mit Ereignisshorizont $r_g > 9km$

Supermassive S.L: Bis zu $10^9 M_\odot$ mit $r_g \sim 20\,AU$

Schwarzes Loch - Nasa / JPL-Caltech

Realistischere Darstellung: A Black Hole's Warped World (NASA)



Credits: NASA's Goddard Space Flight Center/Jeremy Schnittman

https://youtu.be/chhcwk4-esM

"[...] Visualization of a flight toward a supermassive black hole, labels highlight many of the fascinating features produced by the effects of general relativity along the way. Produced on a NASA supercomputer, the simulation tracks a camera as it approaches, briefly orbits, and then crosses the event horizon—the point of no return—of a monster black hole much like the one at the center of our galaxy. "

Credit: NASA's Goddard Space Flight Center/J. Schnittman and B. Powell

19. April 2019 Schwarzes Loch im Zentrum von M87:

Image credit: Event Horizon Telescope Collaboration

Galaxie:

"gravitativ gebundene große Ansammlung von Materie wie Sternen und Planetensystemen, Gasnebeln, Staubwolken und sonstigen Objekten."

Milchstraße:

Enthält ca. 300 Milliarden Sterne,

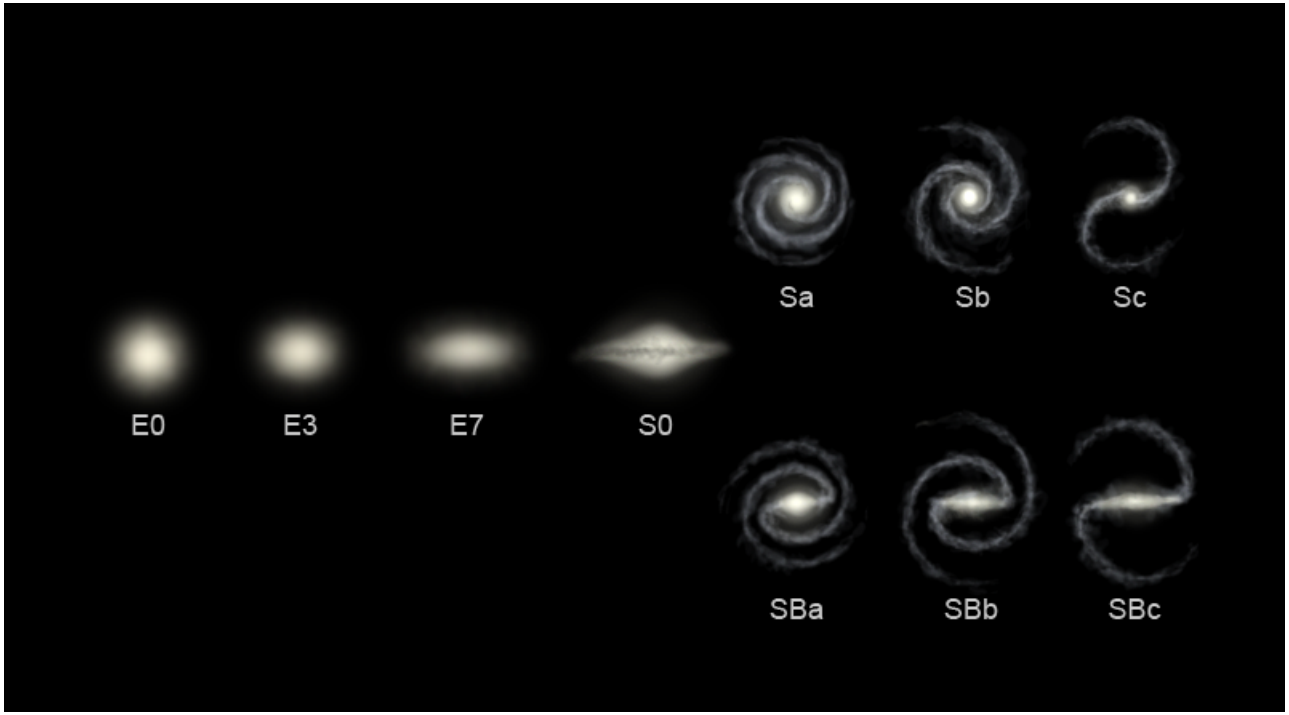
Durchmesser ca. 100 000 Lichtjahre.

mindestens 1 Billion Sterne, Durchmesser ca. $1,7 \cdot 10^5 LJ$

"Pinwheel Galaxy (Messier 101)" - European Space Agency & NASA

Größter Massenanteil ist Dunkle Materie !

Hubble Klassifikation



"Hubble Galaxy Classification" - ESA / ESO

E=Elliptische Galaxie; S=Spiralgalaxie; SB=Balken-Spiralgalaxie

S0=Übergangsbereich

Galaxiengruppen: < 50 Galaxien

Masse: $m \approx 10^{13} M_{\odot}$

Durchmesser: $d \approx 10^{6} LJ$

Galaxienhaufen: einige Tausend Galaxien

Größte gravitationsgebundene Strukturen des Universums !

Masse: $m \approx 10^{14} M_{\odot} - 10^{15} M_{\odot}$

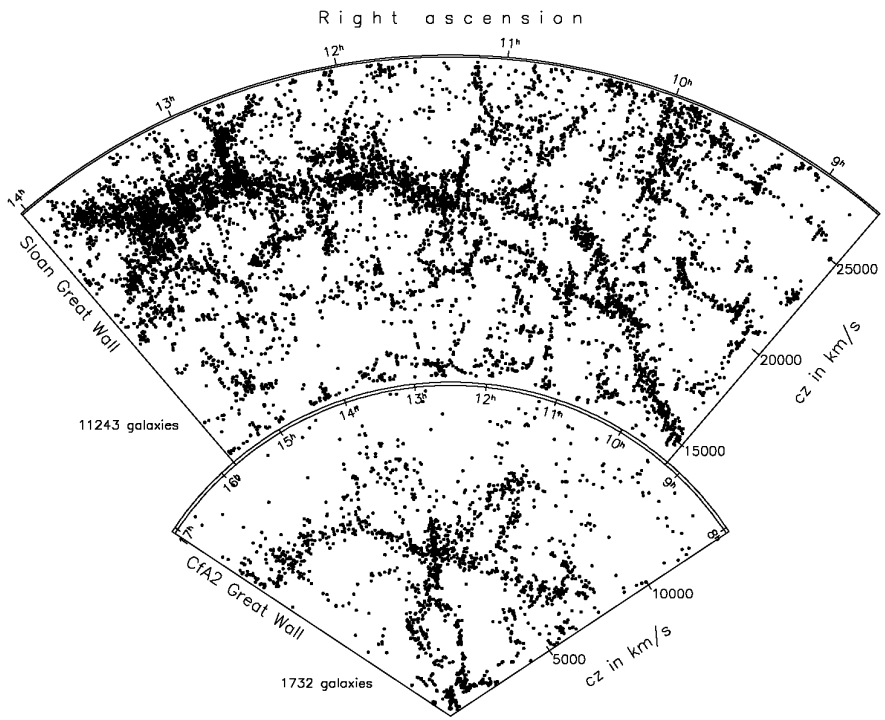
Durchmesser: $d \approx 10 MLJ - 20 MLJ$

Fornax Cluster

"The Fornax Galaxy Cluster" - ESO / J. Emerson / VISTA.

Filamente: Größte Strukturen im Universum!

$10^{17} - 10^{18} M_{\odot}$, Ausdehnung im Bereich $10^9 LJ$



Sloan Great Wall - A Map of the Universe, ApJ 624, 463-484

Einsteinsche Feldgleichungen

Allgemeine Relativitätstheorie 1915:

Die Raumzeit wird als vierdimensionaler mathematischer Raum aufgefasst.

Alle Körper (z.B. Planeten) bewegen sich auf den "kürzesten Verbindungslinien" zwischen zwei Punkten in der vierdimensionalen Raumzeit.

Die Struktur der Raumzeit wird durch die Einsteinschen Feldgleichungen vorgegeben:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = \frac{8\pi\gamma}{c^4} T_{ik}$$

Signatur der Metrik $(-,+,...,+)$ dann

$$R^i_k - \frac{1}{2} R \delta^i_k + \Lambda \delta^i_k = \frac{8\pi\gamma}{c^4} T^i_k$$

mit

$$\begin{aligned} R &= \sum_n \sum_k g^{nk} R_{nk} \\ R_{nk} &= \sum_a \left(\partial_a \Gamma^a_{kn} - \partial_k \Gamma^a_{an} + \sum_b \left(\Gamma^a_{ab} \Gamma^b_{kn} - \Gamma^a_{kb} \Gamma^b_{an} \right) \right) \\ \Gamma^h_{ik} &= \frac{1}{2} \sum_n g^{hn} \left(\partial_i g_{kn} + \partial_k g_{ni} - \partial_n g_{ik} \right) \end{aligned}$$

g^{ik} inverse Metrik mit $\sum_b g^{ib} g_{bk} = \delta^i_k$

Karl Schwarzschild findet 1916 eine stationäre, sphärisch symmetrische Lösung der Einsteinschen Gleichungen:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2\gamma M}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2\gamma M}{c^2 r}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

Karl Schwarzschild findet 1916 eine stationäre, sphärisch symmetrische Lösung der Einsteinschen Gleichungen:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2\gamma M}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2\gamma M}{c^2 r}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

Exaktere Beschreibung der
Planetenbewegungen im Gravitationsfeld der Sonne

Karl Schwarzschild findet 1916 eine stationäre, sphärisch symmetrische Lösung der Einsteinschen Gleichungen:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2\gamma M}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2\gamma M}{c^2 r}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

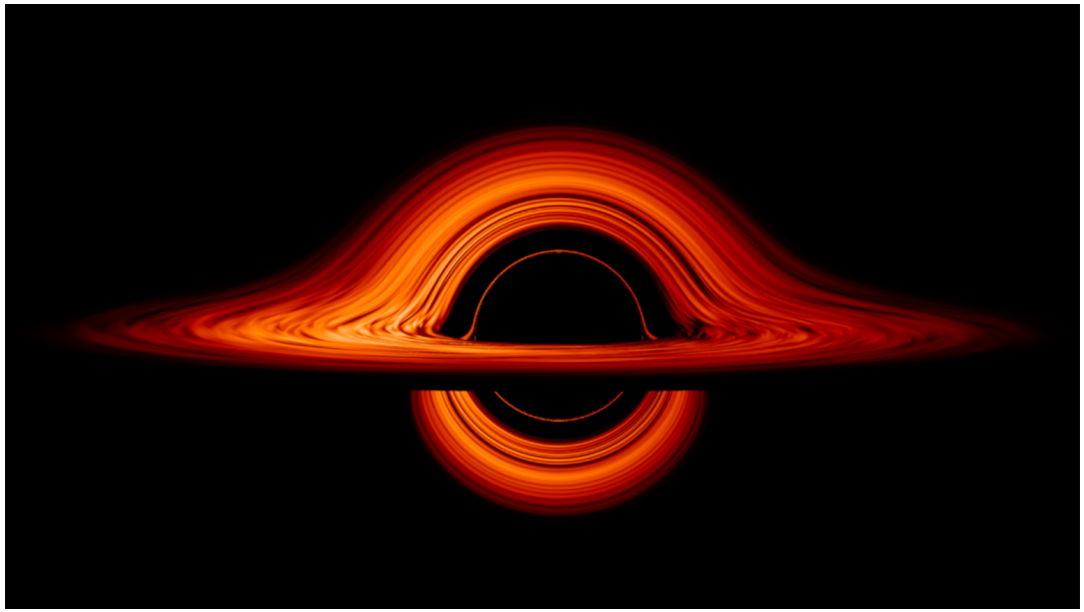
Exaktere Beschreibung der
Planetenbewegungen im Gravitationsfeld der Sonne

Eigenschaften der Schwarzschild-Raumzeit:

Raumzeitkrümmung wird unendlich bei $r = 0$ (z.B. ist $\mathcal{K} = \frac{12 r_s^2}{r^6}$)

Koordinatensingularität bei $r_s = \frac{2\gamma M}{c^2}$

Karl Schwarzschild's Lösung beschreibt ein Schwarzes Loch



Credits: NASA's Goddard Space Flight Center/Jeremy Schnittman

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2\gamma M}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2\gamma M}{c^2 r}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

Ein stationäres Schwarzes Loch besitzt einen Ereignishorizont bei

$$r_s = \frac{2\gamma M}{c^2}$$

Ein stationäres Schwarzes Loch besitzt einen Ereignishorizont bei

$$r_s = \frac{2\gamma M}{c^2}$$

Von $r < r_s$ kommt nichts wieder heraus, auch kein Licht !

Alles was die Grenze passiert, trifft auf die Singularität bei $r = 0$

Ein stationäres Schwarzes Loch besitzt einen Ereignishorizont bei

$$r_s = \frac{2\gamma M}{c^2}$$

Von $r < r_s$ kommt nichts wieder heraus, auch kein Licht !

Alles was die Grenze passiert, trifft auf die Singularität bei $r = 0$

Physik im Inneren eines Schwarzen Lochs weitgehend unbekannt
Theorie der Quantengravitation ?

Ein stationäres Schwarzes Loch besitzt einen Ereignishorizont bei

$$r_s = \frac{2\gamma M}{c^2}$$

Von $r < r_s$ kommt nichts wieder heraus, auch kein Licht !

Alles was die Grenze passiert, trifft auf die Singularität bei $r = 0$

Physik im Inneren eines Schwarzen Lochs weitgehend unbekannt
Theorie der Quantengravitation ?

Schwarzschildradius der Sonne ca. $2,97\,km$

Schwarzschildradius der Erde ca. $0,89\,cm$

Was passiert, wenn sich Beobachter A dem Ereignishorizont nähert?

Was passiert, wenn sich Beobachter A dem Ereignishorizont nähert?

Bei stellaren Schwarzen Löchern sind Gezeitenkräfte zu groß!

Was passiert, wenn sich Beobachter A dem Ereignishorizont nähert?

Bei stellaren Schwarzen Löchern sind Gezeitenkräfte zu groß!

Annäherung an ein supermassives Schwarzes Loch eher möglich.

Was passiert, wenn sich Beobachter A dem Ereignishorizont nähert?

Bei stellaren Schwarzen Löchern sind Gezeitenkräfte zu groß!

Annäherung an ein supermassives Schwarzes Loch eher möglich.

Für konstante r, θ, ϕ erhält man $ds = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}\, cdt$, daraus folgt:

$\infty-$weit entfernter Beobachter W beobachtet Zeitdilatation bei N

$$t_W = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r_s + D}}} = \tau \cdot \sqrt{\frac{r_s}{D} + 1}$$

D = Abstand von N zum Ereignishorizont.

Beispiel: Supermassives Schwarzes Loch Sagittarius A*, Beobachter A misst Eigenzeit $\tau = 10\,s$.

Beispiel: Supermassives Schwarzes Loch Sagittarius A*, Beobachter A misst Eigenzeit $\tau = 10\,s$.

Befindet sich A dabei in $380000km$ Entfernung zum Ereignishorizont EH von Sgr A*, so misst ein weit entfernter Beobachter W für diese Zeitspanne $t_W \approx 57\,s$.

Beispiel: Supermassives Schwarzes Loch Sagittarius A*, Beobachter A misst Eigenzeit $\tau = 10\,s$.

Befindet sich A dabei in $380000km$ Entfernung zum Ereignishorizont EH von Sgr A*, so misst ein weit entfernter Beobachter W für diese Zeitspanne $t_W \approx 57\,s$.

Nähert sich A auf $10\,km$ dem EH, so misst W etwa 3 Stunden.

Beispiel: Supermassives Schwarzes Loch Sagittarius A*,
Beobachter A misst Eigenzeit $\tau = 10\,s$.

Befindet sich A dabei in $380000km$ Entfernung zum Ereignishorizont EH von Sgr A*, so misst ein weit entfernter Beobachter W für diese Zeitspanne $t_W \approx 57\,s$.

Nähert sich A auf $10\,km$ dem EH, so misst W etwa 3 Stunden.

Nähert sich A auf $1\,m$ dem EH, so misst W schon $12,6$ Tage.

Beispiel: Supermassives Schwarzes Loch Sagittarius A*,
Beobachter A misst Eigenzeit $\tau = 10\,s$.

Befindet sich A dabei in $380000km$ Entfernung zum Ereignishorizont EH von Sgr A*, so misst ein weit entfernter Beobachter W für diese Zeitspanne $t_W \approx 57\,s$.

Nähert sich A auf $10\,km$ dem EH, so misst W etwa 3 Stunden.

Nähert sich A auf $1\,m$ dem EH, so misst W schon $12,6$ Tage.

Befindet sich A auf dem EH, so misst W die Zeit $t_W = \infty$

Eigentlich rotieren schwarzen Löcher ← Drehimpulserhaltung

Eigentlich rotieren schwarzen Löcher $\leftarrow$ Drehimpulserhaltung

Kerr Metrik beschreibt ein rotierendes Schwarzes Loch

$$\begin{aligned} ds^2 =& \rho^2 \left(\frac{dr^2}{r^2 - 2mr + a^2} + d\theta^2 \right) + \left(r^2 + a^2\right) \sin^2(\theta)\ d\phi^2 \\ & - dt^2 + \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2(\theta)} \left(a \sin^2(\theta)\ d\phi - dt\right)^2 \end{aligned}$$

Eigentlich rotieren schwarzen Löcher ← Drehimpulserhaltung

Kerr Metrik beschreibt ein rotierendes Schwarzes Loch

$$\begin{aligned} ds^2 =& \rho^2 \left(\frac{dr^2}{r^2 - 2mr + a^2} + d\theta^2 \right) + \left(r^2 + a^2\right) \sin^2(\theta)\ d\phi^2 \\ & - dt^2 + \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2(\theta)} \left(a \sin^2(\theta)\ d\phi - dt\right)^2 \end{aligned}$$

Ergosphäre (alles rotiert mit der Drehrichtung)

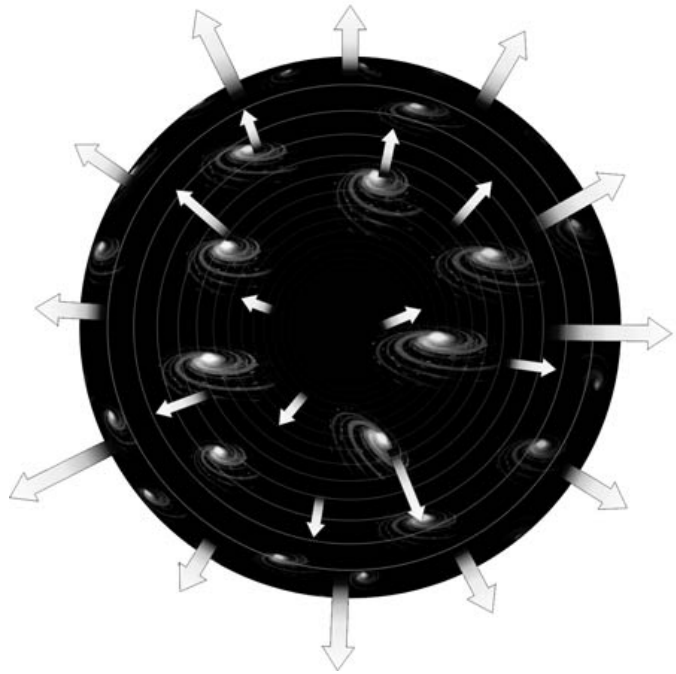
Ereignishorizont

Ring-Singularität bei $r^2 + a^2 \cos^2(\theta) = 0$

Das Urknall Modell

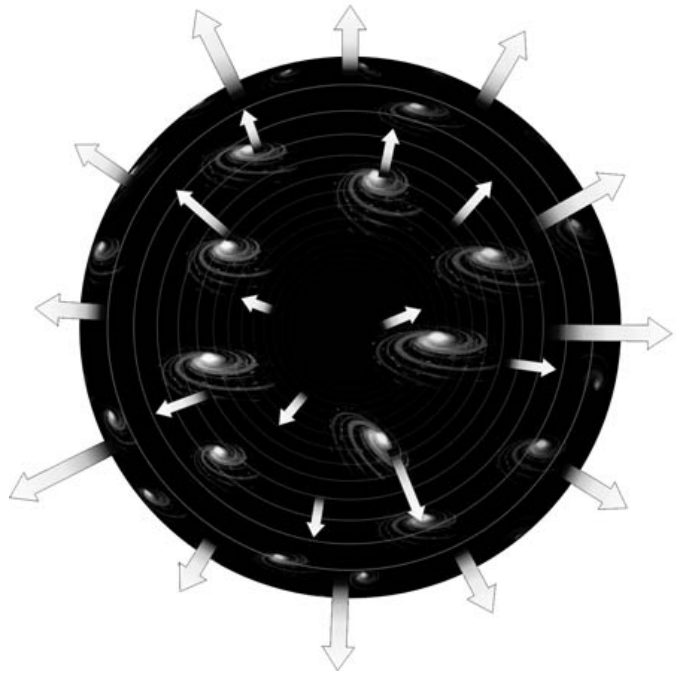
Expansion des Universums

Galaxien entfernen sich um so schneller von uns, je weiter sie entfert sind (Spektrallinien sind rotverschoben - Dopplereffekt).



Expansion - ESA / ESO

Galaxien entfernen sich um so schneller von uns, je weiter sie entfert sind (Spektrallinien sind rotverschoben - Dopplereffekt).



Expansion - ESA / ESO

Entdeckung der Expansion des Universums führt zu Urknallmodell !

Big Bang Nukleosynthese (bis 3 min): ^{1}H, ^{2}H, ^{3}He, ^{4}He, ^{7}Li

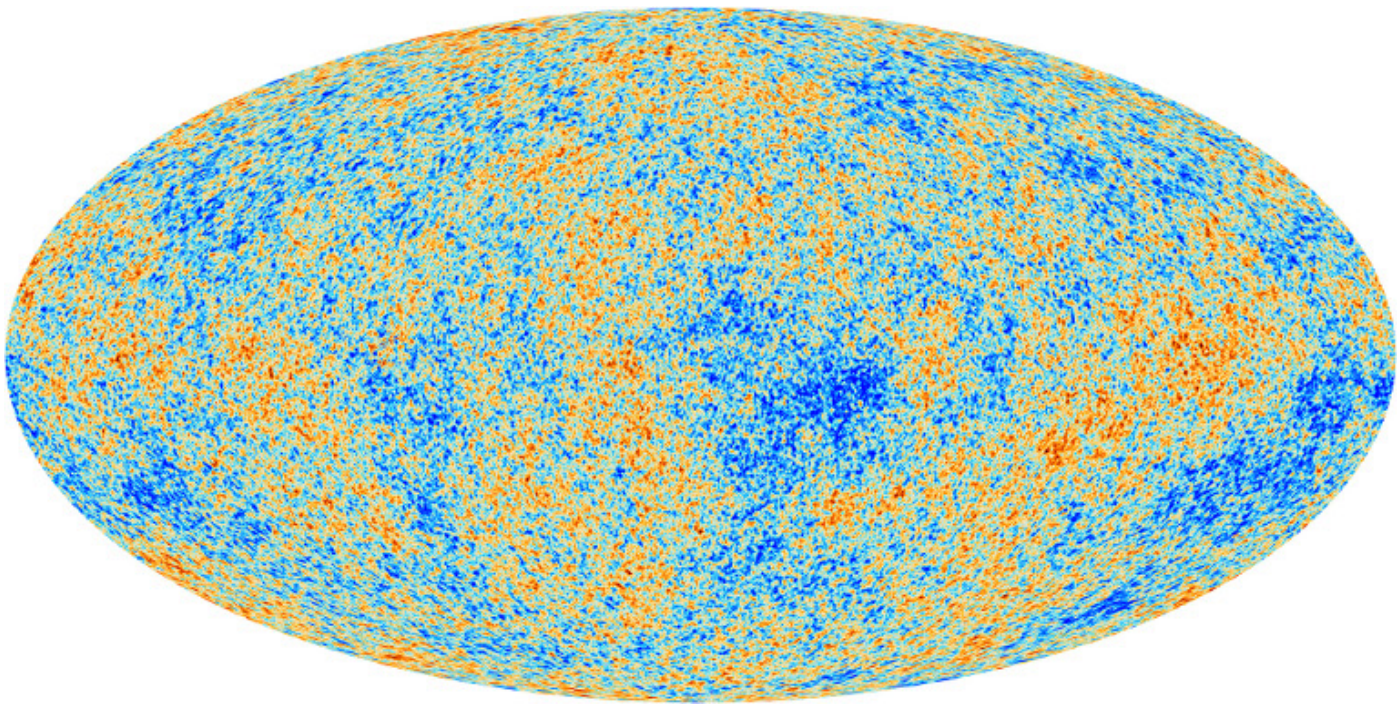
Protonen	**Element**	**Symbol**	Isotope
1	Wasserstoff	H	$^{1}_{1}$H, $^{2}_{1}$H, $^{3}_{1}$H
2	Helium	He	$\ldots{}^{3}_{2}$He, $^{4}_{2}$He, $\ldots$
3	Lithium	Li	$\ldots{}^{7}_{3}$Li, $\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Kernfusion in Sternen: Elemente bis Eisen (26 Protonen)

Noch schwerere Kerne entstehen bei **Supanovae**!

Abkühlung durch Expansion, stablie Atome ab ca. 380 000 Jahre

Thermisches Spektrum: Hintergrundstrahlung heute etwa $2,7\,K$



CMBR - ESA / Planck Mission

Kosmologisches Prinzip: Das Universum ist homogen und isotrop.

“Das Universum sieht immer von jedem Punkt aus gleich aus.”

Kosmologisches Prinzip: Das Universum ist homogen und isotrop.

"Das Universum sieht immer von jedem Punkt aus gleich aus."

NASA Mission WMAP: Universum ist räumlich flach!

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t)\left\{dx^2 + dy^2 + dz^2\right\}$$

Kosmologisches Prinzip: Das Universum ist homogen und isotrop.

"Das Universum sieht immer von jedem Punkt aus gleich aus."

NASA Mission WMAP: Universum ist räumlich flach!

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t)\left\{dx^2 + dy^2 + dz^2\right\}$$

Aus Einsteins Feldgleichungen $R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = \frac{8\pi\gamma}{c^4} T_{ik}$ folgt:

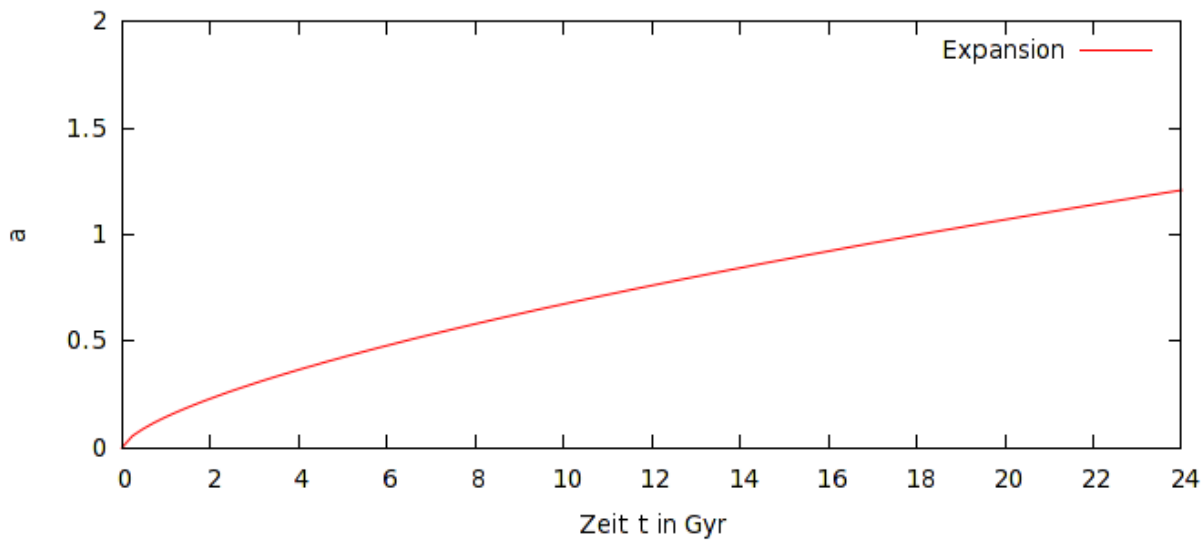
$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \Omega_M \cdot \frac{1}{a^3} \tag{1}$$

wobei $\Omega_M = \frac{8\pi\gamma}{3H_0^2}\rho_0$, **Hubblekonstante**: $H_0 \approx 70 \frac{km}{s\,Mpc} \approx 0,07 \frac{1}{Gyr}$

Die Lösung der DGL (1) ist offensichtlich

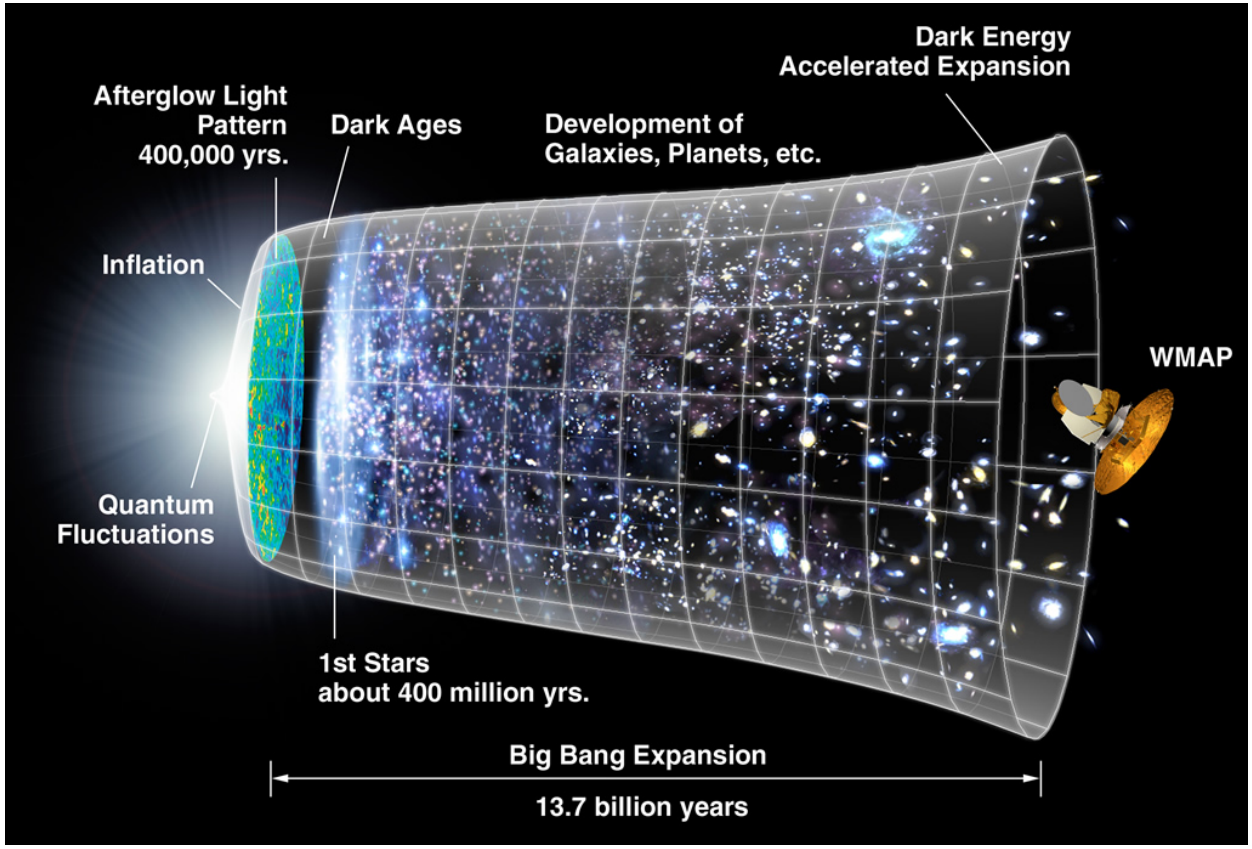
$$a(t) = \left(\frac{3}{2} H_0 \sqrt{\Omega_M}\,(t - t_0)\right)^{\frac{2}{3}}$$

Gemesen: $\Omega_M \approx 0,279$ und $H_0 \approx 0.07 \frac{1}{Gyr}$. Für $t_0 = 0$:



Beschleunigte Expansion

Problem: Die Expansion des Universums nimmt wieder zu.



NASA / WMAP

Kosmologische Konstante Λ soll beschleunige Expansion bewirken:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} + \Lambda g_{ik} = \frac{8\pi\gamma}{c^4} T_{ik}$$

Kosmologische Konstante Λ soll beschleunige Expansion bewirken:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} + \Lambda g_{ik} = \frac{8\pi\gamma}{c^4} T_{ik}$$

Für unser räumlich flaches Universum ergibt sich nun die DGL

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_M}{a^3} + \Omega_\Lambda\right) \tag{2}$$

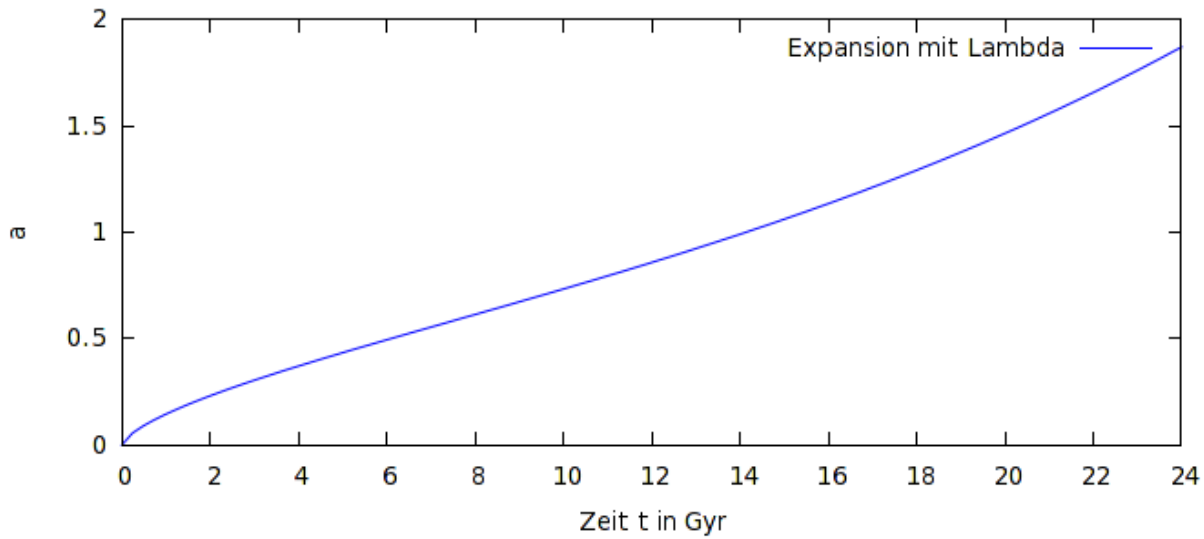
wobei $\Omega_\Lambda = \frac{c^2 \Lambda}{3 H_0^2}$.

Lösen des Integrals mit $z^2 = \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M} a^3$ dann $z = \sinh y$, siehe (3)

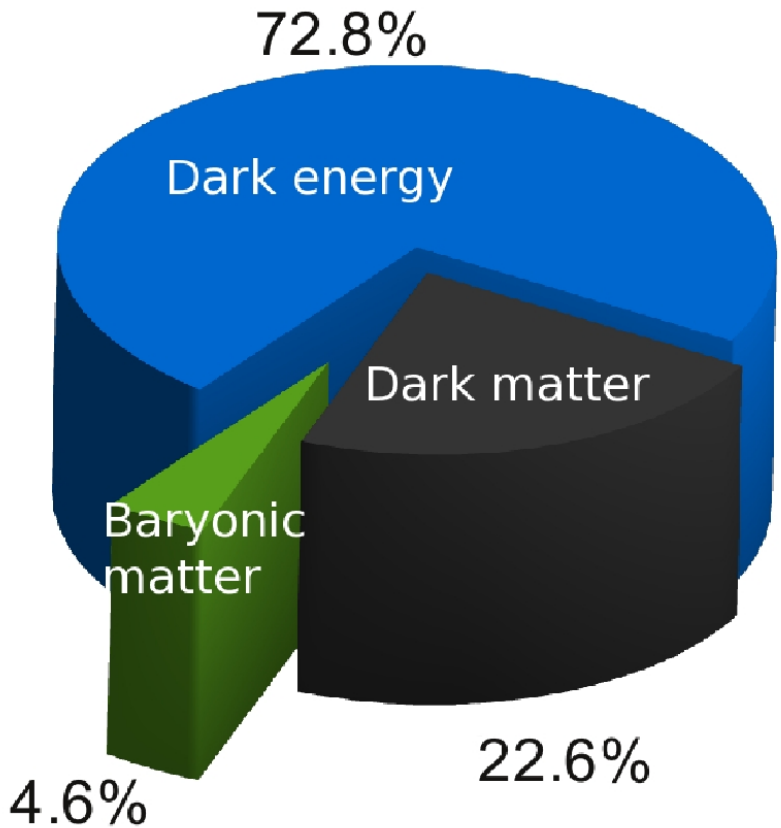
Die DGL (2) hat die Lösung

$$a(t) = \sqrt[3]{\frac{\Omega_M}{\Omega_\Lambda}} \sinh^{\frac{2}{3}} \left[\frac{3\sqrt{\Omega_\Lambda}}{2} H_0 \left(t - t_0 \right) \right]$$

Für $t_0 = 0$ erhält man:



Was bewirkt die beschleunige Expansion ?



Lösen der DGL:

Sammeln von a und da auf einer Seite der Gleichung ergibt ein Integral, dass sich mit der folgenden Stammfunktion leicht lösen lässt:

Seien $m, l \in \mathbb{R}$ dann gilt:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\frac{m}{x^3}+l}} = \frac{2}{3\sqrt{l}}\operatorname{Arsinh}\left(\sqrt{\frac{l}{m}x^3}\right) + c_0 \tag{3}$$

Das Integral kann natürlich einfach durch Substitution gelöst werden (mit $z^2 = \frac{l}{m}x^3$)