Bisher kannten wir Gleichungen, deren Lösung eine Zahl oder eine Menge von Zahlen ist. Die Gleichung $x^2 - 4 = 0$ hat zum Beispiel die Lösungen x = 2 und x = -2. Zur Überprüfung machen wir die Probe: $2^2 - 4 = 0$ und $(-2)^2 - 4 = 0$.

Differentialgleichungen sind Gleichungen, in denen Funktionen und deren **Ableitungen** auftreten. Die Lösung einer Differentialgleichung ist eine **Funktion**.

1. Aufgabe:

- (a) Berechne die erste Ableitung f'(x) der Funktion $f(x) = e^{2x}$.
- (b) Zeige, dass die Gleichung f'(x) 2f(x) = 0 erfüllt ist.
- (c) Zeige, dass $f(x) = 5e^{2x}$ und sogar $f(x) = ce^{2x}$ mit $c \in \mathbb{R}$ ebenfalls Lösungen sind.

Die Gleichung f'(x) - 2f(x) = 0 ist eine **Differentialgleichung**, kurz DGL. Zur Abkürzung schreibt man auch f' - 2f = 0.

2. Aufgabe:

- (a) Finde eine Lösung für f' 3f = 0 und zeige die Existenz der Lösung (Probe).
- (b) Welche spezielle Lösung erfüllt zusätzlich f(0) = 7?

Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung lässt sich z.B. durch Vorgabe des Anfangswertes f(0) noch spezifizieren. Eine solche Problemstellung nennt man **Anfangswert-Problem**, kurz AWP.

3. Aufgabe:

- (a) Zeige: Das AWP f' + 0.5f = 0, $f(1) = \frac{2}{\sqrt{e}}$ besitzt die Lösung $f(x) = 2e^{-0.5x}$.
- (b) Warum ist $f(x) = e^{-0.5x}$ hier keine Lösung, obwohl die DGL erfüllt ist?
- (c) Löse das AWP f' + 4f = 0, f(0) = 9

4. Aufgabe:

- (a) Sei $a, f_0 \in \mathbb{R}$. Löse das AWP f' + af = 0, $f(0) = f_0$ (mit Herleitung der Lösung). Tipp: $\frac{f'}{f} = [\ln f]'$.
- (b) Sei a(x) eine Funktion und A(x) die Stammfunktion von a(x), so dass A'(x) = a(x). Löse allgemein die Gleichung:

$$f' + a(x)f = 0$$

(Differentialgleichungen dieser Art nennt man homogen.)

5. Aufgabe:

Die Differentialgleichung

$$\frac{dU}{dt} + \frac{1}{RC}U = 0 (1)$$

gibt die Spannung U als Funktion in Abhängigkeit der Zeit t beim Entladen eines Kondensators an.

- (a) Löse die DGL (1) allgemein.
- (b) Es wird ein Kondensator mit der Kapazität von $C=2500\mu F$ entladen, der Widerstand beträgt $R=16k\Omega$. Zum Zeitpunkt t=0 beginnt der Entladevorgang des Kondensators, die Spannung beträgt 3V. Welche Funktionsgleichung beschreibt den zeitlichen Verlauf U(t) nach Abschalten der Spannungsquelle?
- (c) Zeiche die Funktion U in ein geeignetes Koordinatensystem.

6. Aufgabe:

- (a) Zu welchem Zeitpunkt T_H ist die Spannung nach dem Ausschalten eines Kondensators auf die Hälfte des Anfangswertes abgesunken? Gib T_H in Abhängigkeit der Kapazität C und des Widerstands R an.
- (b) Wann beträgt die Spannung noch 10 % des Anfangswertes?
- (c) Berechne T_H für die Werte aus Aufgabe (5b).