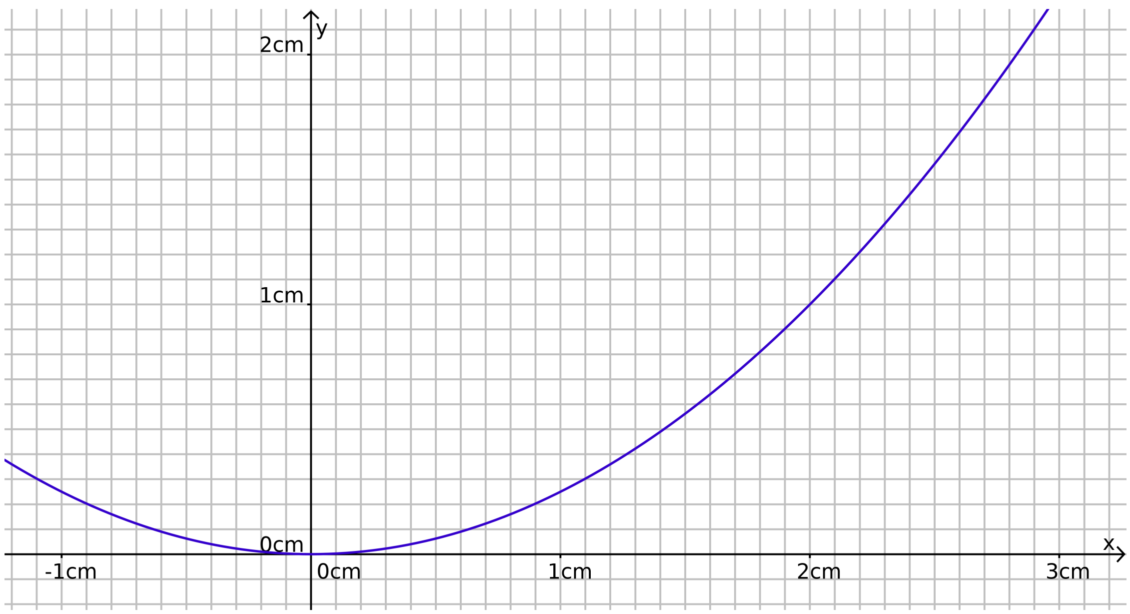
1. **Aufgabe:**

(a) Für die angegebenen Funktionen sollen **jeweils** die folgenden Punkte bearbeitet werden:

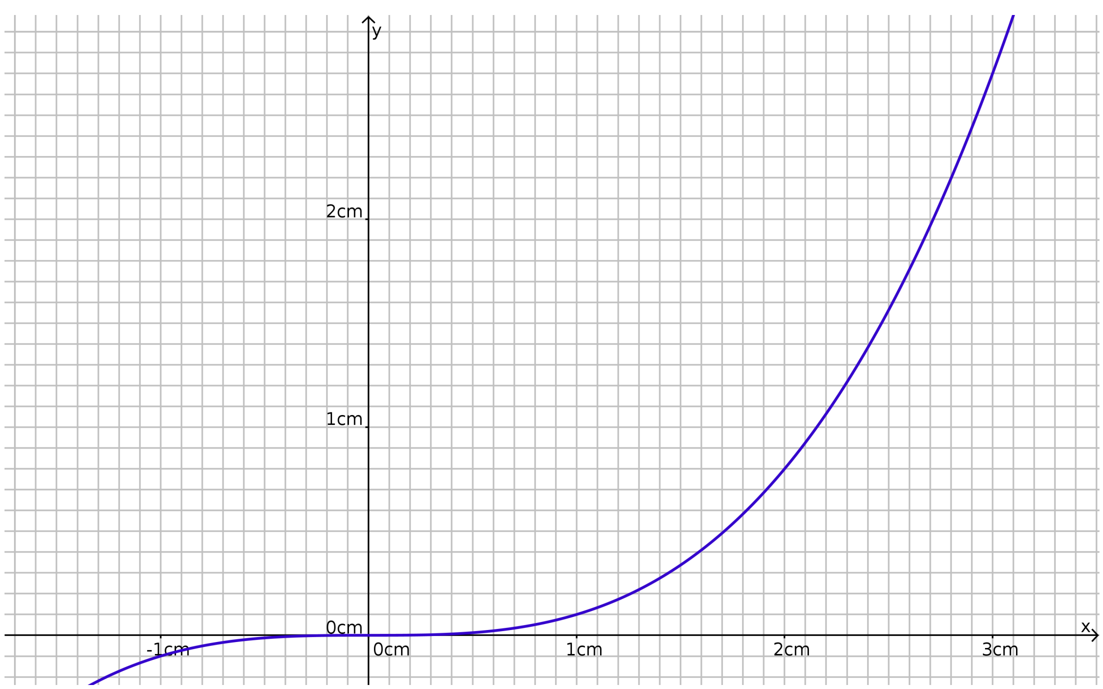
$$f(x) = 1,5 \qquad f(x) = x \qquad f(x) = x + 1 \qquad f(x) = \frac{1}{2}x + 2$$

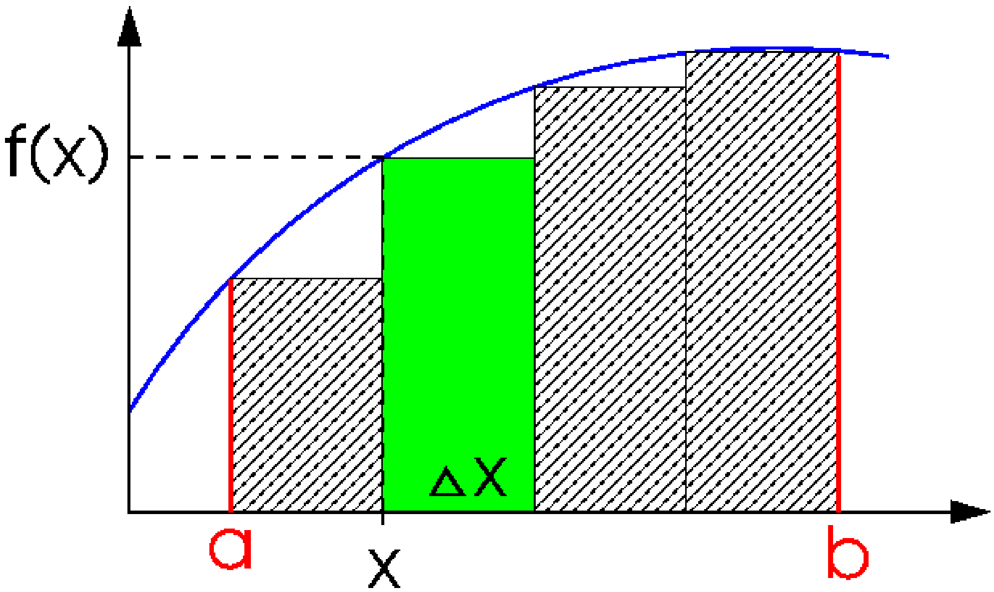
- Bestimme möglichst genau den Flächeninhalt, den die Funktion f im Intervall $[0, 2]$ mit der $x-$Achse einschließt.
- Bestimme möglichst genau den Flächeninhalt, den die Funktion f im Intervall $[0, 3]$ mit der $x-$Achse einschließt.
- Welchen Flächeninhalt $Fläche(x)$ schließt f allgemein mit der $x-$Achse in einem Intervall $[0, x]$ ein?
- Berechne die Ableitung $\frac{d}{dx}Fläche(x)$ der "Flächenfunktion" $Fläche(x)$.

(a) Verfahre wie in Teilaufgabe 1a mit der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2$:



(b) Verfahre wie in Teilaufgabe 1a mit der Funktion $f(x) = \frac{1}{10}x^3$:





Sei $f \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Die Fläche A unter der Kurve f wird in $n \in \mathbb{N}$ Rechtecke (in der Abbildung $n = 4$) aufgeteilt. Jedes Rechteck hat die Breite Δx, ein Rechteck an der Stelle x hat den Flächeninhalt $f(x)\,\Delta x$. Man summiert die Flächen aller n Rechtecke auf, um einen Näherungswert für A zu erhalten:

$$A \approx f(a)\,\Delta x + f(a+\Delta x)\,\Delta x + f(a+2\Delta x)\,\Delta x + \cdots + f(b-\Delta x)\,\Delta x = \sum_{x \in M} f(x)\,\Delta x$$

mit $M = \{a,\ a+\Delta x,\ a+2\Delta x, \ldots,\ b-\Delta x\}$

Für einen besseren Näherungswert erhöht man die Anzahl n der Rechtecke.
Die Breite Δx jedes einzelnen Rechtecks wird dadurch immer kleiner.

Für $n \to \infty$ schreibt man dx statt Δx und das Summenzeichen $\sum$ wird zum **Integral** $\int$.
Der **exakte** Wert für die Fläche A ist:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Achtung: Das Integral wertet Flächenstücke unterhalb der $x-$Achse negativ!

Sei F eine differenzierbare Funktion mit $\dfrac{dF}{dx} = f$, dann nennt man F eine **Stammfunktion** von f. *Sei $c \in \mathbb{R}$, so ist auch $F + c$ eine Stammfunktion von f, da die Konstante c beim Ableiten wegfällt.*

Fundamentalsatz der Integralrechnung:
Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $a < b$, $w \in [a, b]$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Für alle $x \in [a, b]$ ist die Integralfunktion

$$F(x) = \int_w^x f(\xi)\, d\xi \tag{1}$$

differenzierbar und eine **Stammfunktion** von f. Außerdem gilt:

$$\int_a^b f(x)\, dx \quad = \quad [F(x)]_a^b \quad = \quad F(b) - F(a) \tag{2}$$

1. **Aufgabe:** Gib eine Stammfunktion F von f an:
   (a) $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$, $f(x) = x^5$, $f(x) = x^n$
   (b) $f(x) = 3x^4 - 5x$, $f(x) = 12x + 10x^{13}$, $f(x) = 2 + 2x^2 + 4x^4$
   (c) $f(x) = x^{-2}$, $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $f(x) = 3x + \frac{1}{x^5}$, $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $f(x) = 2\sqrt{x}$, $f(x) = 3x^{\frac{5}{2}}$

2. **Aufgabe:**
   (a) Berechne: (i) $\displaystyle\int_1^3 x^2 dx$ (ii) $\displaystyle\int_2^5 \left(2x^3 - 9\right) dx$ (iii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx$ (iv) $\displaystyle\int_3^4 \left(\frac{2}{x^3} - 7\sqrt{x}\right) dx$
   (b) Beweise[1] den Fundamentalsatz der Integralrechnung, siehe (1) und (2).
   (c) Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10$.
      i. Ermittle die Nullstellen und berechne $\int_0^1 f(x)\, dx$ und $\int_1^2 f(x)\, dx$ sowie $\int_0^2 f(x)\, dx$.
      ii. Zeichne die Funktion. Wo liefert das Integral negative Werte? Ermittle begründet die **Fläche**, welche f im **Intervall** $[0, 2]$ mit der $x-$Achse einschließt.
      iii. Bestimme rechnerisch die **Fläche**, welche f mit der $x-$Achse einschließt. Was ist zu beachten?

3. **Aufgabe:**
   Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ stetig, F eine Stammfunktion von f und $a \in \mathbb{R}$. Beweise oder Begründe geometrisch:
   (a) Sei f eine Funktion mit $f(-x) = \pm f(x)$ für alle $x \in \mathbb{D}$. Dann gilt:

$$\int_{-a}^a f(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad f(-x) = -f(x) \\ 2\int_0^a f(x)\, dx & \text{falls} \quad f(-x) = f(x) \end{cases}$$

   (b) Für $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 1$ gilt $\displaystyle\int_{-a}^a x^{2n-1} dx = 0$ und $\displaystyle\int_{-a}^a x^{2n} dx = \frac{2a^{2n+1}}{2n+1}$. Aufgabenteil (3a) benutzen!
   (c) Sei F eine Stammfunktion von f , so ist auch $\widetilde{F} = F + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\, dx \quad = \quad F(b) - F(a) = \widetilde{F}(b) - \widetilde{F}(a)$$

[1] *Hinweis: In einem Intervall der Länge Δx existiert ein $\widetilde{x} \in [x\,,\, x + \Delta x]$, so dass $\displaystyle\int_x^{x+\Delta x} f(\xi)\, d\xi = \Delta x \cdot f(\widetilde{x})$.*

1. **Aufgabe:**
Ein Bauer besitzt insgesamt $200ha$ Land. Durch seine Felder verläuft ein Fluss, dessen Verlauf in einem geeigneten Koordinatensystem näherungsweise durch die Funktion

$$f(x) = x^3 - 4x$$

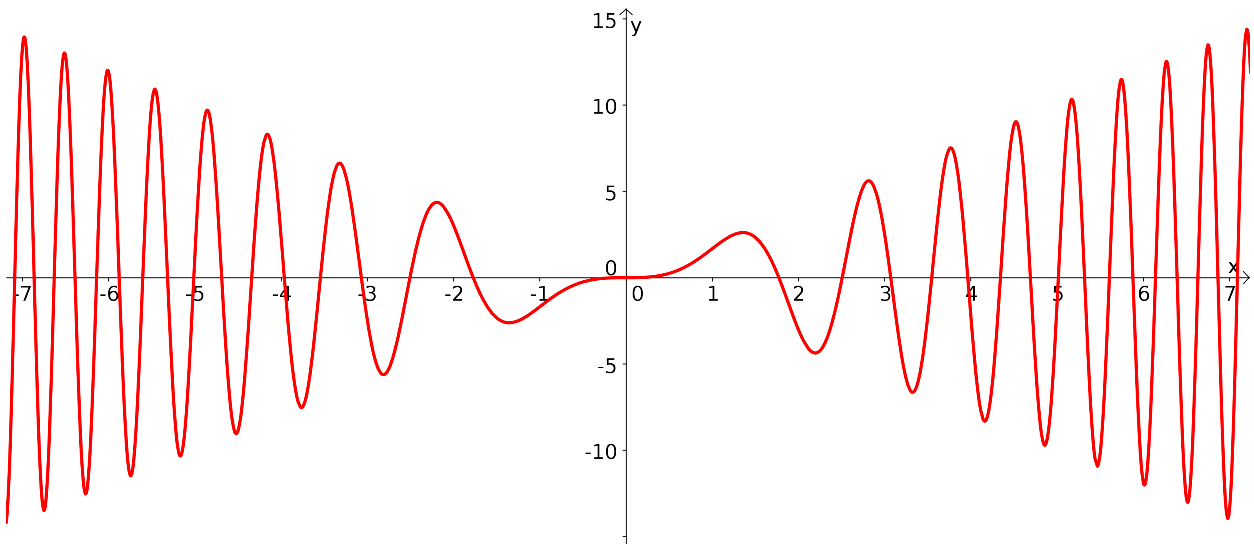
beschrieben werden kann ($1LE = 100m$). Jetzt soll eine Autobahn durch das Gebiet des Bauern gebaut werden. Unser Koordinatensystem ist so gewählt, dass die Autobahn entlang der $x-$Achse verläuft. Der Bereich, den der Fluss mit der Autobahn einschließt, kann von dem Bauern nicht mehr genutzt werden. Für diese Fläche wird er entschädigt mit 42 Euro pro ha im Jahr.

(a) Zeichne die Funktion (ggf. geeignete Wertetabelle erstellen) / Fertige eine Skizze an.

(b) Ermittle rechnerisch die Entschädigung, welche der Bauer nach drei Jahren erhält.

(c) Berechne wie viel Prozent weniger der Bauer insgesamt hat, wenn er vor dem Autobahnbau mit seinen Feldern 10000 Euro pro Jahr erwirtschaftet hat. (Der Zusammenhang zwischen Fläche und Gewinn sei linear.)

2. **Aufgabe:**
Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2x \sin x^2$



(a) Berechne die ersten drei Nullstellen x_1 , x_2 und x_3 von f , für die gilt $x_k \geq 0$?

(b) Seien x_k sowie x_{k+1} benachbarte Nullstellen und A_k der Flächeninhalt, den f im Intervall $[x_k, x_{k+1}]$ mit der $x-$Achse einschließt. Beweise, dass gilt $A_1 = A_2$

(c) Zeige, dass alle Flächenstücke A_k den gleichen Flächeninhalt haben.

Satz: Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $a < b$, $w \in [a, b]$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

1. Für alle $x \in [a, b]$ ist die Integralfunktion
$$F(x) = \int_w^x f(\xi)\, d\xi$$
differenzierbar und eine **Stammfunktion** von f.

2. Es gilt die Gleichung:
$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Hinweis: Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung existiert in einem Intervall der Länge Δx ein $\widetilde{x} \in [x\,,\, x + \Delta x]$, so dass:

$$\int_x^{x+\Delta x} f(\xi)\, d\xi = \Delta x \cdot f(\widetilde{x}) \tag{3}$$

Gleichung (3) darf benutzt werden!

Beweis:

1) Nach Definition der Ableitung ist:

$$\frac{dF}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\int_w^{x+h} f(\xi)\, d\xi - \int_w^x f(\xi)\, d\xi \right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(\xi)\, d\xi \tag{4}$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechung (3) gibt es ein $\widetilde{x} \in [x\,,\, x + h]$, so dass:

$$\int_x^{x+h} f(\xi)\, d\xi = h \cdot f(\widetilde{x})$$

Da $\widetilde{x} \in [x\,,\, x + h]$ muss $\lim_{h\to 0} \widetilde{x} = x$. Wegen der Stetigkeit von f gilt dann $\lim_{h\to 0} f(\widetilde{x}) = f(x)$. Anwenden auf Gleichung (4) ergibt dann:

$$\frac{dF}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot h \cdot f(\widetilde{x}) = \lim_{h\to 0} f(\widetilde{x}) = f(x) \qquad \square$$

2) Sei nun $w = a$. Dann ist die Integralfunktion
$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\, d\xi \tag{5}$$

Nach (5) ist hier $F(b) = \int_a^b f(\xi)\, d\xi$ und $F(a) = 0$. Offensichtlich gilt:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \qquad \square$$